ANALIZA FUNKCJONALNA I TOPOLOGIA

*Lista 7 - Zbieżność słaba i *-słaba*

1. Sprawdzić czy dany ciąg (x_n) jest słabo zbieżny w przestrzeni X i, jeżeli tak jest, wyznaczyć jego słabą granicę, gdzie

   (a) $X = \ell^p$, gdzie $p \in [1, \infty)$, $x_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, przy czym 1 występuje na n- tym miejscu,

   (b) $X = c_0$, gdzie $x_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, przy czym 1 występuje na n-tym miejscu,

   (c) $X = c$, gdzie $x_n = (1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$, przy czym 1 wystepuje na n pierwszych miejscach.

   (d) $X = \ell^2$, gdzie $x_n = (0, \ldots, 0, \sqrt{n}, 0, 0, \ldots)$, przy czym $\sqrt{n}$ występuje na n-tym miejscu.

2. Niech $X = c_0$ i niech X^* oraz X^{**} będą przestrzeniami dualnymi do X oraz X^*. Przypomnieć sobie, jakie to są przestrzenie. Następnie, biorąc ciąg funkcjonałów (φ_n) z X^*, które można utożsamić z ciągami

$$\varphi_n \equiv (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \; razy}, 1, 0, \ldots),$$

   pokazać, że $w^* - \lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$, ale $w - \lim_{n\to\infty} \varphi_n \neq 0$.

3. Podać nowy przykład ciągu operatorów ograniczonych na UPL, który jest słabo zbieżny, ale nie jest silnie zbieżny.

4. Podać nowy przykład ciągu operatorów ograniczonych na UPL, który jest silnie zbieżny, ale nie jest zbieżny w normie operatorowej.

5. Zbadać zbieżność w normie operatorowej, silną zbieżność i słabą zbieżność ciągów operatorów ograniczonych z zadań 1,2 z listy 5.

6. Niech $(T_n), (S_n)$ będą ciągami operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta H. Pokazać, że

   (a) jeżeli $s - \lim_{n\to\infty} T_n = T$, to $\sup_{n\in\mathbb{N}} \| T_n \| < \infty$,

   (b) jeżeli $w - \lim_{n\to\infty} T_n = T$, to $\sup_{n\in\mathbb{N}} \| T_n \| < \infty$,

   (c) jeżeli $w - \lim_{n\to\infty} T_n = T$ oraz $s - \lim_{n\to\infty} S_n = S$, to $w - \lim_{n\to\infty} T_n S_n = TS$,

   (d) jeżeli $s - \lim_{n\to\infty} T_n = T$ oraz $s - \lim_{n\to\infty} S_n = S$, to $s - \lim_{n\to\infty} T_n S_n = TS$.

R. Lenczewski